9. KIS KAVICS KUPA (2018) – megoldások

1. feladat

EU-s tagállamok, melynek eléréséhez Budapestről 0 EU-s tagállamok közti határt kell átlépni: Magyarország. EU-s tagállamok, melynek eléréséhez Budapestről 1 EU-s tagállamok közti határt kell átlépni: Ausztria, Horvátország, Románia, Szlovákia, Szlovénia. EU-s tagállamok, melynek eléréséhez Budapestről két EU-s tagállamok közti határt kell átlépni: Bulgária, Csehország, Lengyelország, Németország, Olaszország. EU-s tagállamok, melynek eléréséhez Budapestről 3 EU-s tagállamok közti határt kell átlépni: Belgium, Dánia, Franciaország, Görögország, Hollandia, Litvánia, Luxemburg. Ebben a **0018** országban keresse őket Göthe.

2. feladat

A legközelebbi napsütötte hely az északi sarkpont, mely 43°-kal északabbra van Budapestnél. Két egymástól 1°-ra lévő szélességi kör távolsága kicsit több 111 km-nél (a Föld sugara Π/180 km), ennek 43-szorosa 100-asokra lefelé kerekítve **4700** km.

3. feladat

Ezen ország a Cseh Köztársaság, ez **0015** karakterből áll.

4. feladat

Az első 18 prímszám közt van a 2 és az 5 is, szorzatuk osztható e kettő szorzatával, 10-zel, így a 0 (megoldás: **0000**) számjegyre végződik.

5. feladat

60 számból kettőt $60\cdot59/2 = 1770$-féleképp választhatunk ki. 60 darab egymást követő pozitív egész szám közül 20 db 3-mal osztható, 20-20 db pedig 3-mal osztva 1, illetve 2 maradékot ad. A 60-ból két szám összege akkor osztható 3-mal, ha mindkettő osztható 3-mal, ilyen két számot $20\cdot19/2 = 190$-féleképp választhatunk ki, vagy ha az egyik 3-mal osztva 1, a másik 2 maradékot ad, ilyen két számot $20\cdot20 = 400$-féleképp választhatunk ki a 60-ból. Így 1770 esetből $190 + 400 = 590$-ben osztható 3-mal a számok összege. Ezért az esély 60-szorosa $590/1770\cdot60 =$ **0020**.

6. feladat

Az egymilliónál nem nagyobb négyzetszám legfeljebb 1000-nek a négyzete. Egy egész számnak csak az utolsó három számjegye befolyásolja négyzetének utolsó három számjegyét. (Általánosan: utolsó n – n természetes szám – számjegye négyzetének utolsó n számjegyét). A "289-re végződő négyzetű" szám négyzetének utolsó számjegye 9, emiatt a keresett szám csak 3-ra és 7-re végződhet. Az ilyen számok közül a 17 / 33 / 67 / 83-ra végződő számok négyzete végződik 89-cel, és a 17 / 33 / 67 / 83 végű számok közül a 17 / 233 / 267 / 483 / 517 / 733 / 767 / 983-ra végződő számok négyzete végződik 289-cel. Ilyen pozitív számból 1000-ig 8 akad: 17, 233, 267, 483, 517, 733, 767, 983, ezek négyzeteiből **0008** van, ennyi számmal lehet védekezni.

7. feladat

Nézzük, legfeljebb hány gyermek maradt otthon, 1–20-ig legfeljebb hány számot választhatunk ki, hogy egyik se legyen osztója a többi szorzatának. Ebben a 11, 13, 17 és 19 számok benne lehetnek, nem osztóik a többi tizenkilenc szorzatának se, de a többi szám közül egyik se osztója ezekkel együtt se a többi szorzatának, ha nélkülük nem osztható, kivéve, ha csak az 1 volt kiválasztva, de akkor több szám nem választható, ekkor meg már négy is. Így egy ilyen kiválasztásban a 11, 13, 17 és 19 benne van, az 1 nem. Nézzük, a maradó 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20 számok közül legfeljebb hány választható ki, hogy egyik se legyen osztható a többi szorzatával. A 7 és 14 közül 1 választható ki (7 osztója 14-nek), kedvezőbb a 7-et, mert ez se lesz osztója a többi szorzatának, és ami ő és más számok szorzatának osztója, a 14 és ugyanazon más számok szorzatának is osztója, de pl. 2 osztója 14-nek, az kizárja az „otthonmaradásból", de nem osztója 7-nek. Mivel a 7 is prímszám, újra elég a maradék számokból (1–20-ig az egész számok, kivéve 1, 7, 11, 13, 14, 17, 19) nézni, hány választható ki, hogy egyik se legyen osztója a többi szorzatának. Ezekből 3-nál többet nem lehet kiválasztani (esetekre bontva belátható). Legfeljebb 8-an maradtak otthon, így legalább 20 – 8 = **0012**-en mentek el.

8. feladat

Legyen Aladár helye A, Benedeké B, Cilié C és Dávidé D pont. Mivel $16^2 + 63^2 = 65^2$, az ABC háromszög derékszögű (2 oldal hosszának négyzetösszege egyenlő a harmadikéval). Ugyancsak, mivel $25^2 + 60^2 = 65^2$, az ADC háromszög derékszögű (két oldal hosszának négyzetösszege egyenlő a harmadikéval). Így mindkét háromszögben a terület a befogók szorzata/2, 504 illetve 750 egységnégyzet. Ezek összege, vagyis **1254** egységnégyzet a négyszög területe (mivel konvex).

9. feladat

A kékesi sárkányok által keresett négyjegyű természetes számok mind a négy számjegye hétféle lehet (a három „Kékes magasságában szereplő" számjegyen kívüliek), így ők $7^4 = 2401$ számot találnak. Az írott-kői sárkányok által keresett háromjegyű számok százas helyiértékén 7 számjegy lehet (a 0 miatt) a másik két számjegye 8-féle lehet (egyik számjegy se lehet az Írott-kő magasságában szereplő), így $7 \cdot 8^2 = 448$ számot találnak. A Kékesen 2401 – 448 = **1953** számmal találnak többet.

10. feladat

$$2Na + 2H_2O = 2NaOH + H_2$$

$$2Na + 2HCl = 2NaCl + H_2$$

$$2Na + H_2SO_4 = Na_2SO_4 + H_2$$

A legtöbb hidrogén a sósavba dobásnál keletkezik, ugyanis abban a nátrium lényegében 900 gramm vízzel és 100 gramm HCl-dal reagál, így a „100 gramm vizes" esetnél egyértelműen több hidrogén keletkezik. A kénsavba dobás esetén a különbség annyi, hogy a 100 gramm kénsav hidrogéntartalma, melyből hidrogén keletkezik, kisebb, mint a hidrogén-kloridé [$M(H) / M(HCl) > 2M(H) / M(H_2SO_4)$]. A 900 gramm víz hidrogéntartalmának (100 g) fele szabadul fel, ez 50 gramm. A 100 gramm HCl hidrogéntartalma pedig ≈ 2,78 gramm. Így összesen ≈ 52,78 gramm hidrogén keletkezik, ez lefelé kerekítve **0052** gramm.

11. feladat

A savas kémhatású vizes oldatú anyagok a felsoroltak közt: kén-trioxid, szén-dioxid, foszforsav. Ezek moláris tömegeinek összege 80 + 44 + 98 = **0222**.

12. feladat

A színes anyagok a felsoroltak közt: S_8, P_∞, Au, NO_2, Cu, F_2 . Így összesen **0006** anyaggal lehet a szfinxet táplálni.

13. feladat

210 g telített kalcium-klorid oldat 84 g, azaz 0,75 mol $CaCl_2$-ot tartalmaz, ebben 1,5 mol kloridion van. Ennyinek kell lennie a kálium-klorid oldatban is. 1,5 mol kloridionhoz 1,5 mol KCl kell, az 112,5 gramm kálium-klorid. Az oldat 25 *m/m*%-os lesz, tehát tömege 4-szerese az oldott anyagénak, **0450** gramm.

14. feladat

Az esés ideje $\sqrt{(2h/g)} = \sqrt{(160\ \text{m}/(10\ \text{m/s}^2))} = 4$ másodperc. Ezalatt a függőleges helyváltozatás 80 m, a vízszintes $t \cdot v = 4\ \text{s} \cdot (12\ \text{m/s}) = 48\text{m}$. Így a Demiguise elmozdulása Pitagorasz-tétellel $\sqrt{((80\ \text{m})^2 + (48\ \text{m})^2)} \approx 93{,}3$ m. A két érték összege $4 + (\approx 93{,}3) \approx 97{,}3$, ez lefelé kerekítve **0097**.

15. feladat

A teljesítmény $(1/2m \cdot v^2)/t = (1/2 \cdot 100\ \text{kg} \cdot (10\ \text{m/s})^2/5\ \text{s}) =$ **1000** W.

16. feladat

A 15 cm higanyt 13,6-szor ennyi, 204 cm víz „ellensúlyozza” a túloldalon, így azon szárban a folyadékoszlop 204 cm – 15 cm = 189 cm-rel lesz magasabb. Mivel a két szárban összesen 615 cm magas a folyadékoszlop, a másik számban (615 + 189)/2 = 402 cm magasságig érne a víz, de csak 4 m-ig érhet, a többi kifolyik. Így a kérdezett szárban a folyadékoszlop 4 m –189 cm = 211 cm magasságig fog érni. Így a folyadékoszlop magassága 3 m – 211 cm= **0089** cm-rel csökken.

17. feladat

Mérjük az energia nullpontját a 8 ^{o}C-on, a folyamat végén az egész rendszer ilyen hőmérsékletű. Így a folyamat elején ugyanakkora abszolút értékű a víz (Cola) és jég energiája. Legyen a jég tömege *x*. Ekkor:

$$x \cdot 8\ \text{K} \cdot 4200\ \text{J/(kg} \cdot \text{K)} + x \cdot 334000\ \text{J/kg} = x \cdot 367600\ \text{J/kg} = 0{,}3\ \text{kg} \cdot 14\ \text{K} \cdot 4200\ \text{J/(kg} \cdot \text{K)}$$

Így $x = 17640\ \text{J}/(367600\ \text{J/kg}) \approx 47{,}9$ g. Ez lefelé kerekítve **0047** gramm jég.