Kis Kavics Kupa 2016 – Eredmények

1. 0120 $100^2 - 60^2 = x^2 \rightarrow x = 80$ km. $200 - 80 = 120 \rightarrow 120$ km-re vannak a kincstől.

2. 0136 dingó (4 láb; nem erszényes), vombat (4 láb; erszényes), tasmán ördög (4 láb; erszényes), rókakuzu (4 láb; erszényes), emu (2 láb; nem erszényes), koala (4 láb; erszényes), víziagáma (4 láb; nem erszényes)
$12 \cdot 4 + 7 \cdot 4 + 9 \cdot 4 + 6 \cdot 4 = 136$

3. 0002 Kuba fővárosa Havanna → Horvátország, Hollandia

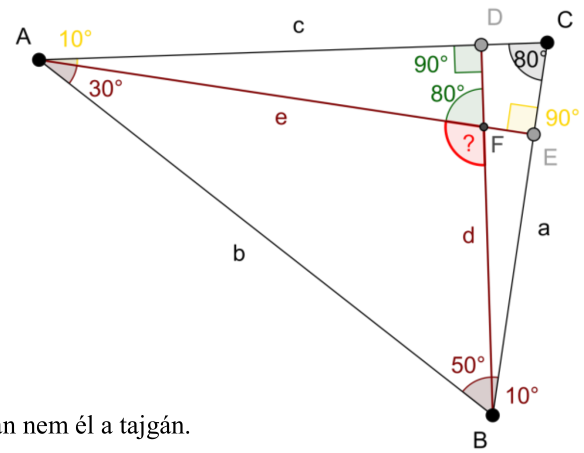
4. 7810 $\Delta E_b = m \cdot c_{jég} \cdot \Delta T_1 + m \cdot L_o + m \cdot c_{víz} \cdot \Delta T_2 = 210 + 3400 + 4200 = 7810$ kJ

5. 2899 Próbálgatás útján a legkisebb ilyen számpár: 1449, 1450. Összegük 2899.

6. 0006 Legyen 100 g fekete lőpor az eredmény! Ennek tartalma: 75 g KNO_3, 15 g C és 10 g S.
Ha az 1. keverék tömege x g, akkor a 2. keveréké y = (100 – x) g.
A KNO_3 tömegére: $75 = 0{,}65 \cdot x + 0{,}9 \cdot (100 - x) \rightarrow x = 60$ g, $y = 40$ g
Arányuk: 3:2 → $3 \cdot 2 = 6$

7. 0100 180° = 90° + 80° + **10°** → CAE∠ = 10°
180° = 90° + **10°** + **80°** → AFD∠ = 80°
80° a keresett szög kiegészítő szöge,
így BFA ∠ = 180° – 80° = 100°

Másként:
a CDFE négyszög három szöge ismert, így:
DFE ∠ = 360° – 80° – 90° – 90° = 100°
BFA ∠ = DFE = 100°



8. 0004 Hegyi gazella, hárpia, prérikutya, fekete kajmán nem él a tajgán.

9. 0459 $180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Az 5 mindenképpen külön számjegyet igényel, a maradék négy tényezőből a 4 és 9, illetve a 6 és 6 számjegyek képezhetőek. Az eredmény mindkét esetben háromjegyű szám lesz, a különböző lehetőségek közül a 459 a legkisebb.

10. 0006 Spanyolország, Franciaország, Németország, Lengyelország, Fehéroroszország/Ukrajna, Oroszország

11. 0007 Afganisztán, Kazahsztán, Kirgizisztán, Pakisztán, Tádzsikisztán, Türkmenisztán, Üzbegisztán

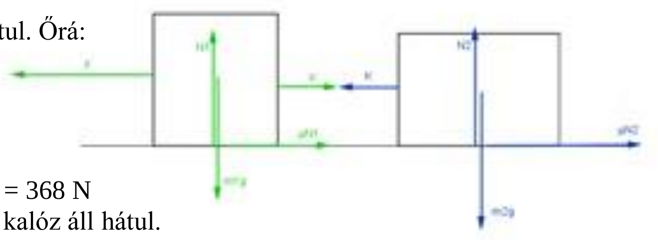
12. 0100 $s = 5 \cdot (22 + 198) = 1100$, $t = s/v = 1100/11 = 100 \rightarrow 100$ h alatt jutnak el a kikötőbe.

13. 0040 $m = M/N_A = 24/(6 \cdot 10^{23}) = 4 \cdot 10^{-23}$; $4 \cdot 10^{-23}$ g = 40 yg

14. 0655 Ra Li B O Ga La B Ar At Ra V Ar Ar U Th Al Al
→ 88 + 3 + 5 + 8 + 31 + 57 + 5 + 18 + 85 + 88 + 23 + 18 + 18 + 92 + 90 + 13 + 13 = 655

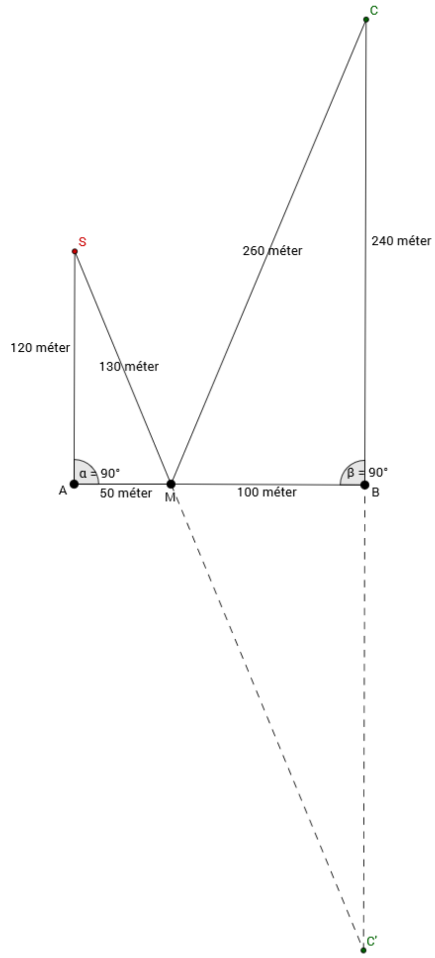
15. 2688 A helyes válaszok: 1, 2, 4, 6, 7, 8.
Az eredmény: $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 2688$.

16. 0368 Tegyük föl, hogy a 83 kilós kalózt húzzák hátul. Őrá:
x: $0 = K - \mu N_2$ és y: $0 = N_2 - m_2 g$
$\rightarrow K = \mu m_2 g = 0{,}2 \cdot 83 \cdot 10 = 166$ N
A másik, középső kalózra:
x: $0 = F - \mu N_1 - K$ és y: $0 = N_1 - m_1 g$
$\rightarrow F = K + \mu m_1 g = 166 + 0{,}2 \cdot 101 \cdot 10 = 368$ N
Ugyanez az eredmény adódik, ha a 101 kilós kalóz áll hátul.



17. 0226 A $^4He^{2+}$ tömegszáma 4, így: $234 - 4 - 4 = 226$.

18. 0027 Tükrözzük a C pontot az AB szakaszra! S és C’ között a legrövidebb út az SC’ szakasz. Legyen SC’ és AB metszéspontja M! Tükrözzük az MC’ szakaszt AB szakaszra! Ekkor megkapjuk a legrövidebb utat S és C között, ami érinti az AB szakaszt. Az SAM derékszögű háromszög és a CMB derékszögű háromszög hasonlóak, oldalaik hossza 1:2 arányú. Ez és a Pitagorasz-tétel alapján AM = 50 m, MB = 100 m, SM = 130 m, MC = 260 m. A kalózoknak SM, illetve MC szakaszokat kell megtenniük, ami összesen (130 + 260 = 390) 390 m. Mivel maximum 52 másodperc áll a rendelkezésükre, min. $v = \Delta s/\Delta t = 390 / 52 = 7{,}5 \rightarrow v = 7{,}5$ m/s
Mivel 1 m/s 3,6 km/h-nak felel meg: 3,6 · 7,5 → 27 km/h
(A férfi 400 m-es síkfutás sebességének világrekordja — éles kanyar bevétele és kincsesláda cipelése nélkül — 9 m/s körül van.)

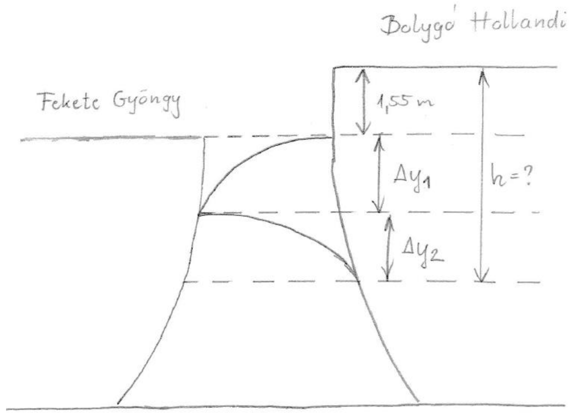


19. 2500 A hajó épp annyit, 5 métert süllyedt lejjebb az x db hordó hatására, mint amennyire eredetileg is a vízbe merült. Azaz a hordók súlya megegyezik a hajó súlyával:
$m \cdot g = \mathrm{x} \cdot m(\text{hordó}) \cdot g$
$250\,000 \cdot 10 = \mathrm{x} \cdot 100 \cdot 10 \rightarrow \mathrm{x} = 2500$

<u>Másként</u>: számítsuk ki a hajó felületét!
$A \cdot h \cdot \rho \cdot g = m(\text{hajó}) \cdot g$
$A \cdot 5 \cdot 1000 \cdot g = 250\,000 \cdot g$
$\mathrm{A} = 50\ \mathrm{m}^2$
Majd: a hordók felpakolása miatt újonnan vízbe merült térfogatra ható felhajtóerő éppen megegyezik a hordók súlyával. Azaz:
$V \cdot \rho \cdot g = m \cdot g$
$A \cdot h \cdot \rho \cdot g = \mathrm{x} \cdot m(\text{hordó}) \cdot g$
$50 \cdot 5 \cdot 1000 \cdot 10 = \mathrm{x} \cdot 100 \cdot 10 \rightarrow \mathrm{x} = 2500$

20. 1391 A hal pontszerű → nem hat rá felhajtóerő a vízben.
y: $0 = F - m \cdot g \rightarrow F = m \cdot g = 10{,}7 \cdot 10 = 107$ N
$W = F \cdot \Delta s_F = 107 \cdot (3 + 10) = 1391$ J

21. 0006 $\Delta t_1 = 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$ s
$$\Delta y_1 = \frac{g * \Delta t_1^2}{2} = \frac{10 * 0{,}5^2}{2} = 1{,}25\ m$$
$\Delta t_2 = 0{,}5 - 0{,}25 + 0{,}55 = 0{,}8$ s
$$\Delta y_2 = \frac{g * \Delta t_2^2}{2} = \frac{10 * 0{,}8^2}{2} = 3{,}2\ m$$
$h = 1{,}55 + 1{,}25 + 3{,}2 = 6$ m



22. 0045 Eredetileg 12,6 · 0,5 = 6,3 g HNO_3 volt, ez 0,1 mol. Tehát 0,1 – 0,06 = 0,04 mol reagált, miközben az egyenletből következően feleennyi, azaz 0,02 mol ezüstöt oldott föl.
Egy érmében 0,02 · 108 = 2,16 g ezüst és így 4,13 – 2,16 = 1,97 g (0,01 mol) arany volt.
501 – 1(feloldott érme) = 500 érmében: n(Ag) = 500 · 0,02 = 10 mol és n(Au) = 500 · 0,01= 5 mol. Ezek kalózdénárban kifejezett értéke: 10 · 2 + 5 · 5 = 45.

23. 0009 A 816^{947} szám osztható 3-mal, mivel 816 osztható hárommal (8 + 1 + 6 = 15, 3|15). Ha a 816-ot hatványozzuk, a szám osztható lesz 9-cel, hiszen a 816 hármas prímtényezőjét is hatványoztuk. Ebből adódóan $9|816^{947}$. Mivel a 9-es oszthatóság egyik jellemzője, hogy nem csak a szám, hanem számjegyeinek összege is osztható 9-cel, így a 816^{947} számjegyeinek összege is osztható 9-cel. Emiatt a 816^{947} számjegyeinek összege számjegyeinek összege is osztható 9-cel, és így tovább.
Ezután a feladatot becsléssel kell megoldani. Vegyük az 1000^{1000} számot. Ez a szám 3001 jegyű ($10^3 = 1000$, $1000^{1000} = (10^3)^{1000} = 10^{(3\cdot 1000)} = 10^{3000}$, amely 3000 nullás és előtte egy egyes). A 816^{947} kisebb ennél, tehát számjegyeinek összege kisebb mint 27 009 (9 · 3001). A 27 009-nél kisebb ötjegyű számok a számjegyeik összegének maximumát a 19 999-nél veszik fel. Ennek a számnak a számjegyeinek összege 37. Itt a számjegyek összegének a maximumát a 29-nél veszi fel, aminek számjegyeinek összege 11. De tudjuk, hogy ennek a számnak oszthatónak kell lennie 9-cel, és 11-nél egy db nem nagyobb, 9-cel osztható szám van, ami a 9.
(A feladat kissé irreális, mivel a világegyetem egészében az atomok száma a becslések szerint 10^{80}.)