



Kis Kavics Kupa 2010



A feladatok megoldásai

1. feladat *Olvasd ki!*

Hányféleképpen olvasható ki a STARWARS szöveg, ha balról jobbra és felülről lefelé haladhatunk az olvasásban és a fekete mezőt ki kell hagynunk?

S	T	A	R	W
T	A	R	W	A
A	R	■	A	R
R	W	A	R	S

Eredmény: 0017

Megoldás:

Írjuk az egyes betűk helyére, hogy hányféleképpen olvashatjuk el odáig a szöveget. A bal felső sarokból indulva jobbra és lefelé egyesével haladva fokozatosan írjuk be a számokat, mindegyik a felette és tőle balra levő szám összege:

1	1	1	1	1
1	2	3	4	5
1	3	■	4	9
1	4	4	8	17

2. feladat *Robotkódok: hány 3-as?*

A köztársaságiak minden robotjukat ellátták egy-egy négyjegyű kóddal. 0000-tól 9999-ig minden számjegysorozat egy-egy robotjukat jelöli.

Összesen hány 3-as számjegy szerepel a köztársasági robotok kódjában?

Eredmény: 4000

Megoldás:

Összesen 4·10000 számjegyből áll a robotok kódja és mind a 10 jegy ugyanannyiszor szerepel benne.

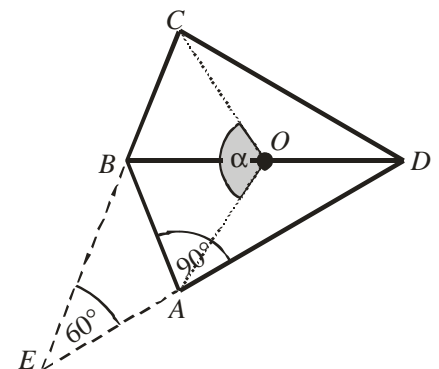
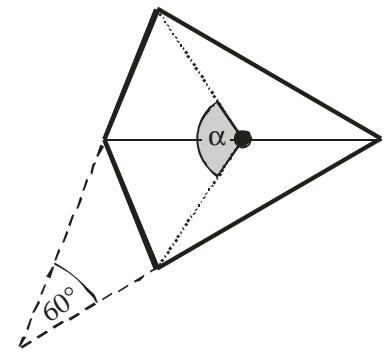
3. feladat *Csillagromboló*

A birodalmi csillagromboló alulnézetben olyan deltoid, amelynek a szimmetriaátlójára nem illeszkedő csúcsainál derékszög van. A deltoid két szemközti oldalának meghosszabbítása egymással 60°-os szöget zár be. A hangár közepén, a deltoid négy csúcsától egyenlő távolságban található.

Mekkora szöget zár be (fokban) egymással a hangártól a szimmetriatengelyre nem illeszkedő két csúcsig menő egyenes folyósó? (Vigyázat, az ábra kissé torzított, hogy a szög szemmel való leolvasását nehezítse.)

Eredmény: 0060

Megoldás: Az EAB háromszög B-nél fekvő külső szöge $60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$, azaz $\angle CDA = 30^\circ$, így $\angle ODA = 15^\circ$ az ODA egyenlő szárú háromszög O-nál levő külső szöge $\angle BOA = 30^\circ$, ennek duplája a keresett szög.





Kis Kavics Kupa 2010



A feladatok megoldásai

4. feladat Kivonás

Írjunk a különböző betűk helyére különböző, az azonos betűk helyére azonos számjegyeket, hogy teljesüljön az alábbi kivonás!

$$\begin{array}{r} S \quad T \quad A \quad R \\ - \quad W \quad A \quad R \quad S \\ \hline 2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

Adjuk meg a négyjegyű STAR számot!

Eredmény: 8109

Megoldás:

A jobbról harmadik oszlopban T és A nem egyenlő, így a jobbról második oszlopban „átvitel” van. Ebből következik, hogy R értéke „nagy” 8 vagy 9.

1-es különbség két alapvetően különböző módon jöhet létre:

a) 1-0, 2-1, 3-2, 4-3, 5-4, 6-5, 7-6, 8-7, 9-8 vagy

b) 0-9

A jobb szélső oszlopban az a) eset fordul elő, mert R nagy. Így a jobbról második oszlopban épp b) lesz. A=0, R=9, így a jobbszáron S=8. Ezekből adódik a többi betű:

$$\begin{array}{r} 8 \quad 1 \quad 0 \quad 9 \\ - \quad 6 \quad 0 \quad 9 \quad 8 \\ \hline 2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

5. feladat Han Solo jutalma

A Szövetség meg akarja jutalmazni Han Solót, mert visszajött az Ezeréves Sólyommal a Halálcsillag elleni csatába. Az 5, 4, 3, 1 számjegyekből és egy további általa választott számjegyből kell összeállítania egy 12-vel osztható ötjegyű számot. Ennek tizenkettedrészét szánják neki aranyban.

Legfeljebb hány arany a jutalom?

Eredmény: 4526.

Megoldás: A hárommal való oszthatóság miatt a hozzávett számjegy a 2, az 5 vagy a 8. Négygyel pontosan akkor osztható egy szám, ha jobbról utolsó jegye páros

- és négygyel is osztható és balra mellette is páros számjegy áll, vagy
- és négygyel nem osztható és balra mellette páratlan számhegy áll.

Ennek alapján az 5 nem is jön szóba, az 5, 5, 4, 3, 1 jegyekből nem rakható össze ötjegyű négygyel osztható szám. A 8 felhasználásával 53184 a maximális, míg a 2-essel az ennél is nagyobb 54312.

6. feladat Robotkódok: önlajozók

Ahogy a 2. feladatban leírtuk, a köztársaságiak minden robotjukat ellátták egy-egy négyjegyű kóddal 0000-tól 9999-ig.

A robotok közül azok és csak azok tudnak jobb kézzel olajat cserélni magukban, amelyek kódjában van legalább két hatos, illetve azok és csak azok a robotok tudnak bal kézzel olajat cserélni magukban, amelyek kódjában van legalább három hatos.

Hány olyan robot van, amely tud olajat cserélni magában, de csak egy kézzel?

Eredmény: 0486

Megoldás: Pontosán két hatos kell. Melyik két helyen legyenek? Erre $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ a válasz.

A másik két helyre bármi kerülhet, ami nem hatos, tehát $9 \cdot 9 = 81$ lehetőség van. $81 \cdot 6 = 486$.



Kis Kavics Kupa 2010



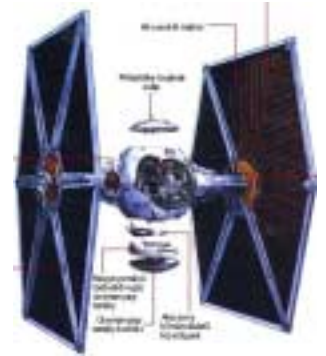
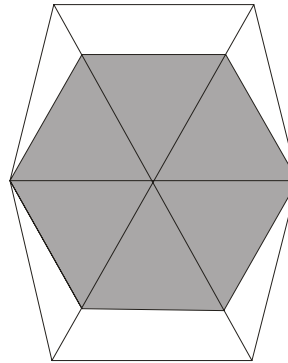
A feladatok megoldásai

7. feladat Tie vadász tervek

A Tie vadász űrhajók első terveit még maga Darth Vader vetette papírra. Ő még a napelemes szárnyakat szabályos hatszög alakúnak képzelte. A Sienar cég mérnökei a próbarepülések után javasolták, hogy a hatszög három átlójából kettőt nyújtsanak a $\frac{4}{3}$ -szorosára.

Az így kapott hatszög területe hányszorosa az eredeti, szabályos hatszögének?

A szorzótényezőt írd fel tovább nem egyszerűsíthető tört alakjában, és a számláló és a nevező összegét add meg válaszul!



Eredmény: 0067.

Megoldás: Ha egy háromszög két oldala közti szögét nem változtatva az egyik oldalt x -szeresére, a másikat y -szorosára nyújtjuk, akkor a háromszög területe $x \cdot y$ -szorosára változik. Így az eredmény:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{40}{27}$$

8. feladat Robotkódok: sorrend

A köztársaságiak minden robotjukat ellátták egy-egy négyjegyű kóddal. 0000-tól 9999-ig minden számjegysorozat egy-egy robotjukat jelöli.

A robotok közül pontosan azokban van hololejátszó, amelyek kódja négy különböző számjegyből áll. R2-D2-ban is van ilyen eszköz, az ő kódja 8540. Ha kódjuk szerint növekvő sorrendbe állítjuk a hololejátszós köztársasági robotokat (0123, 0124, ..., 9876), akkor hanyadik lesz a sorban R2-D2?

Eredmény: 4341

Megoldás: Ha a kód első jegye rögzített, akkor a maradék három $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ -féle lehet. Ha az első kettő rögzített, akkor már csak $8 \cdot 7 = 56$ lehetőség van, az első három rögzítése után pedig csak 7.

Így olyan kódból, amelynek első jegye e 0-tól 7-ig terjed $8 \cdot 504 = 4032$ van, olyanból, amelynek első két jegye 80-tól 84-ig terjed $5 \cdot 56 = 280$ van, végül olyanból, melynek első három jegye 850-től 853-ig terjed $4 \cdot 7 = 28$ van. Ez eddig összesen $4032 + 280 + 28 = 4340$ és a következő lesz R2-D2.

9. feladat Szabadulás lézerkarddal

Luke Skywalker – hősiessége ellenére – sikerült elfogniuk a birodalmi droidoknak. Megkötötték, és csak a csuklója maradt szabadon. Nagy erőfeszítések árán sikerült magához rántania a 1300 mm hosszú lézerkardját, így azzal már eléri a kezétől 120 cm-re lévő ajtót, amin túl a társai várják. Hány milliméter a legnagyobb körnek az átmérője, amit Luke az elhanyagolható vastagságú ajtóba tud vágni?



Eredmény: 1000

Megoldás: Luke csuklója, az ajtó hozzá (csulójához) legközelebbi pontja és a lézerkard és az ajtó találkozási pontja derékszögű háromszöget határoz meg. Ebből számítható a kör sugara ($r^2 = 1300^2 - 1200^2$, $r = 500$), aminek a duplája a kör átmérője.



Kis Kavics Kupa 2010



A feladatok megoldásai

10. feladat A bűvös négyzet kód

R2-D2 információt visz a Szövetségeseznek a Halálcsillagon állomásozó Tie vadászok számáról. Az információt az alábbi táblázatba kódolták. Ha Ackbar Admirális kitölti bűvös négyzetként a táblázatot – tehát az üres helyekre úgy ír számokat, hogy minden sorban, oszlopban és mindkét átlóban ugyanannyi legyen a három szám összege – , akkor a bal felső (szürke) négyzetben a kérdéses információt találja.

Hány Tie vadász van a Halálcsillagon?

		250
400	100	

Eredmény: 0175

Megoldás: Írjunk középre x -et, tehát az átlókban, sorokban, oszlopokban található összeg legyen $650+x$. Két mezőt közvetlenül beírhatunk az alábbi ábra szerint:

	550	250
	x	
400	100	$150+x$

Így a szürke mező ugyanannyire egészíti ki a felső sort, mint az átlót:

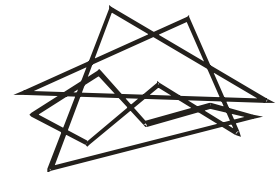
$$550 + 250 = x + (150+x).$$

Ebből $x = 325$, a mindenütt egyenlő összeg 975 és adódik a táblázat kitöltése:

175	550	250
400	325	250
400	100	475

11. feladat A Szövetségi hadsereg emblémája

Leia hercegnő tervezi a Szövetségi hadsereg emblémáját. Egy olyan hurkolt n -szöggel fejezné ki a Szövetségi katonák összetartását, amelynek mindegyik oldala pontosan egy másik oldalát metszi. Melyik az a legkisebb n pozitív egész szám, amelyre van ilyen hurkolt n -szög?



Ez a hurkolt 13-szög nem elég esztétikus a hercegnőnek

Eredmény: 0006.

Megoldás: Az oldalak száma páros, hiszen a metszés egy párosítást ad. Négyszögből nincs ilyen, hatszögből viszont van. Íme:



12. feladat Robotkódok: vukik a parancsnoki szobához!

A köztársaságiak minden robotjukat ellátták egy-egy négyjegyű kóddal. 0000-tól 9999-ig minden számjegysorozat egy-egy robotjukat jelöli.

Azok és csak azok a robotok ismerik a vuki nyelvet, amelyek kódjában van két azonos számjegy. Továbbá azokba és csak azokba a robotokba táplálták be a Halálcsillag tervrajzát, amelyek kódjában van 9-es számjegy. Hány robot tudja elmagyarázni egy vukinak, hogy hogyan lehet eljutni a Halálcsillagban a hangárokból a parancsnoki szobába?

Eredmény: 1423

Megoldás:

$$10^4 - 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 - (9^4 - 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6) = 1423$$

a két azonos számjegyűek

az olyan két azonos számjegyűek, amikben nincs kilences



Kis Kavics Kupa 2010



A feladatok megoldásai

13. feladat A Sithek börtöne

A sithek bezárnak hat jedít egy 6×6 négyzet alapú cellából álló börtönbe. Biztonsági okokból úgy akarják őket elhelyezni, hogy minél „távolabb” legyenek egymástól, azaz hogy két jedinek minél több falat kelljen átfúrnia ahhoz, hogy találkozhassanak. (A cellák sarkaiban betonoszlopok vannak, ott tehát nem lehet fúrni.) Az átfutandó falak számát nevezzük a két cella „távolságának”. A mellékelt ábrán Legyen az A, B cellák távolsága 5, míg A és C távolsága 4, B és C-é pedig 3. A párok közötti távolságok minimuma egy ilyen elrendezésnél u , tehát a példában $u = 3$, de itt csak három jedi van, nem hat.

				B	
	A				
				C	

Később a sithek rájönnek, hogy ha két jedi cellája azonos sorban vagy oszlopban van egymással, akkor a jedik lézerek segítségével tudnak egymással kommunikálni, ezért a sithek úgy helyezik át a jediket, hogy ezt ne tudják megtenni. A párok közötti távolságok minimumát egy ilyen elrendezésnél v jelöli.

Helyezzük el a jediket az első illetve a második esetben úgy, hogy u illetve v a lehető legnagyobb legyen. Mi lesz az uv szorzat maximális értéke?

Eredmény: 0012

Megoldás: Először a második esetet vizsgáljuk, amikor a jedik különböző sorokban és oszlopokban vannak, tehát minden sorban és oszlopban egy-egy van.

Állítjuk, hogy 3-as minimális távolság elérhető 4-es viszont nem. 3-ra oldalt látható a példa.

Bizonyítjuk, hogy 4-es min. távolság nem érhető el. Próbáljunk készíteni ilyen elrendezést! Lesz egy jedi a balról első oszlopban és az ő sorától valamelyik irányban lesz még három sor, tehát az ő sorával együtt négy sor. Alább ezt a négy sort rajzoltuk le, beszűrítve azokat a cellákat, amelyeknek a

tekintetbe vett jedi cellájától legfeljebb 3 a távolsága, tehát, ahová már nem tehetünk jedít.

A már vizsgált jedi melletti sorban csak a 4., 5. vagy 6. oszlopban lehet Jedi.

Fent erre a három esetre külön jelezzük a foglaltságot

Az első két esetben a harmadik sorba már nem is lehet jedít tenni, az utolsó esetben a két jedít nem lehet elhelyezni a felső két sor összesen négy helyére.

Ha nem kell a jediket külön sorba és oszlopba helyezni, akkor 4-es távolság is elérhető. Oldalt látható a példa.

5-ös minimális távolság nem érhető el. Ha lenne ilyen elrendezés, akkor biztosan lenne benne két jedi azonos sorban vagy oszlopban (ha nem akkor az első eset lép



Kis Kavics Kupa 2010



A feladatok megoldásai

érvénybe). Feltehetjük, hogy ez sor. Ebben a két jedi a két szélső oszlopban van. Könnyű ellenőrizni, hogy más jedi nem lehet az ő sorokkal szomszédos sorban, sőt azzal szomszédos sorban sem. Így továbbhaladva látható, hogy a jedik nem helyezhetők el.

14. feladat Korlátozott űrgrások

Az Ezeréves Súlyom megsérült egy aszteroidamezőben. Nem lehet folyamatosan fénysebességen üzemeltetni, csak űrgrásokra képes, 101 fényévnyre vagy 103 fényévnyre képes „átugrani”. Így legalább hány űrgrást kell tennie, hogy a tőle 206984 fényévnyre levő Tatuin bolygóhoz jusson?

Eredmény: 2010

Megoldás: Minél több 103-as ugrást és minél kevesebb 101-es ugrást kell alkalmazni. $206984 = 2010 \cdot 103 - 46$, tehát 2010 db 103-as űrgrással már 46 fényévvel túlment az űrhajó a Tatuinon. Ha 23 db 103-as űrgrást 101-esre cserélünk akkor pont célba jutunk 2010 űrgrással. Kevesebb 101-es űrgrás alkalmazásával megváltozna az összeg 103-as maradéka, így nem juthatnánk pont célba.

15. feladat Rontó Pál a sötét oldal ügynöke

Luke Skywalkernek egy bizonyos robotot kell megtalálnia, amely ismeri a sith hadsereg összetételét és bázisának elhelyezkedését. Luke már megtudta a robot négyjegyű azonosítóját, fel is írta magának egy cetlire. Darth Vader egy ügynököt küldött, hogy megakadályozza a találkozót.

Az ügynöknek két módszere van a szám elrontására. Vagy egy számjegyet tetszőlegesen megváltoztat (pld. 5437→5487), vagy két számjegyet kicserél (pld. 5437→3457). Luke az asztalon hagyta a cetlit a keresett robot kódjával. Az ügynök ezt meglátta és rögtön átjavította 1323-ra. Szerencsére Luke ezt észrevette, és visszajavította az eredeti számra. De, amikor legközelebb lehetősége adódott, az ügynök megint elrontotta a cetlin lévő számot, így most 1213 van ráírva. Mi lehet a keresett robot azonosítója?

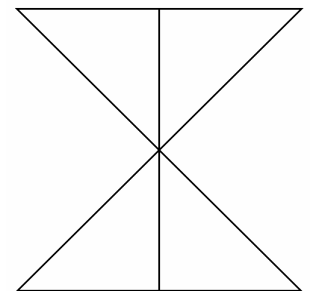
Több megoldás is van. A beadandó eredmény az összes megoldás összege.

Eredmény: 4892.

Megoldás: négy lehetőség van, 1223, 1313, 1233, és 1123.

16. feladat A vezérlőterem zárja

Darth Vader lakosztályának bejáratán különös zár található. Annak, aki be akar jutni, a mellékelt rajz vonalain kell végigvezetni mutatóujját úgy, hogy a hét csomópont közti tíz szakasz mindegyikét pontosan egyszer járja végig egyetlen folytonos vonalban, tehát az ujj elemelése nélkül. A sok lehetőség közül csak az egyik nyitja az ajtót. Han Solo mindenképpen be szeretne menni. Legrosszabb esetben hányszor kell próbálkoznia, ha nem csinálja kétszer pontosan ugyanúgy?



Eredmény: 0144

Megoldás: Onnan kell érkezni és indulni, ahonnan páratlan számú szakasz indul ki. Az alábbi egyszerűsített ábrán jobban érthető a megoldás.



Négyféle típusú út van: AXAXBXB, AXBXAXB, BXAXBXA, BXBXAXA. Mindegyiknek $3! \cdot 2^2$ változata van, azaz összesen 144.



17. feladat Lépegetők

Thrawn admirális, a birodalmi erők hadseregének parancsnoka rendelkezik a Birodalmi lépegetőkről. Most éppen felírja magának egy papírra, hogy hányasával tudja csatába küldeni kedvenc harceszközzeit, hogy minden egységben ugyanannyi lépegető harcjármű legyen és ne maradjon ki egy sem. Legyenek ezek a számok nagyságrendi sorrendben

$$d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < d_5 < d_6 < d_7 < \dots$$

Természetesen $d_1 = 1$, mert egyesével biztosan el lehet küldeni a lépegetőket.

Legkevesebb hány lépegetője lehet a birodalmi hadseregnek, ha azt is tudjuk, hogy ebben a listában $d_6=15$? (Tehát tizenötös csoportokba is berakhatók a lépegetők úgy, hogy ne maradjon ki senki; és 1 és 15 között még négyféle méretű egyenlő csoportra lehet osztani az összes lépegetőt.)

Eredmény: 0315.

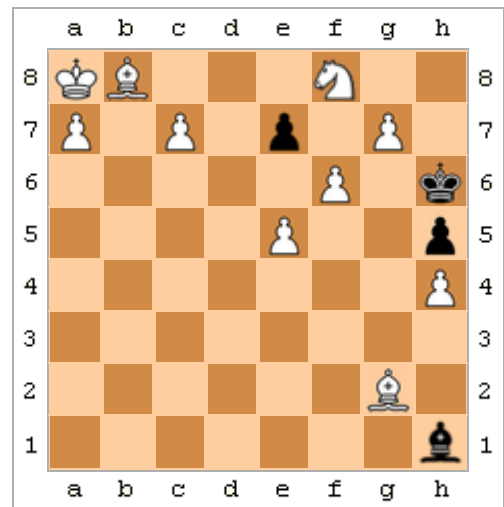
Megoldás: Az osztók között van a 15, így a 3 és az 5 is. Ha a 2 is osztó lenne, akkor a 6 és a 10 is az lenne, így a 15 nem a hatodik legkisebb osztónak adódna. Tehát a 2 nem osztó és egyetlen páros szám sem osztó. A legkisebb még nem használt páratlan számok: 7 és 9. Az 1, 3, 5, 7, 9, 15 legkisebb közös többszöröse $5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$. Ennek első hat osztója valóban 1, 3, 5, 7, 9 és 15.

18. feladat Önmatt két lépésben

Az Ezeréves Sólyom mindjárt leszáll. C-3PO (Threepio) a protokol droid Csubakkával, a vukival sakkozik az űrhajón. Csubakka gyengén játszik, de ha nem nyer, akkor rendkívül dühös. Az alábbi ábra mutatja az állást, világossal játszik Threepio, a sötét Csubakka. Threepio, tehát a világos jön. A droidnak az a célja, hogy Csubakka a második lépésére bemattolja őt, bármilyen rosszakat is húz a vuki. (Vigyázat, a világos gyalogok az ábrán felfelé, a sötét gyalogok pedig lefelé haladnak. Mindkét játékosnak két lépése lehet még a játék végéig.)

Mit lépjen Threepio?

Így legyen szám a lépésből: a bábúknak adjunk értéket a táblázat szerint.



Bábú	Gyalog	futár	Huszár	bástya	vezér	király
Érték	1	2	3	4	5	6

Az állás értékét úgy kapjuk, hogy minden egyes bábú értékét összeszorozzuk a bábú sorának számával (amelyik sorban a bábú áll) és az így kapott értékeket összeadjuk. Adjuk meg Threepio első lépése utáni állás értékének és a lépése előtti – tehát a mostani – állás értékének különbségét!

Eredmény: 0017

Megoldás: A c7 gyalog lépjen be c8-ra és változzon huszárrá (sötét gyalog e7-e6-ra a világos g7 gyalog g8-on futóvá változik, míg sötét e7 üt f6-ra e5 üt f6-ra és sötét kénytelen futójával g2-re ütni és így mattot adni (Wolfgang Pauly, 1912). $3 \cdot 8 - 1 \cdot 7 = 17$.